

1 Loi de probabilité

1.1 Définitions

Définition : On appelle **expérience aléatoire** toute expérience ayant plusieurs **issues** (ou **éventualités**) possibles et dont on ne peut pas prévoir à l'avance laquelle de ces issues sera réalisée.
 Ces éventualités sont notées $e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n$.
 Leur ensemble noté Ω est appelé **univers**.
 On a donc $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$.

Exemple : On lance un dé à 6 faces.
 L'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

Définitions :

- Chaque éventualité e_i est affectée d'une **probabilité**, c'est-à-dire d'un nombre noté p_i tel que :

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$
- On appelle **loi de probabilité** la donnée des p_i vérifiant ces conditions.
- Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont **équiprobables**, ou que la loi de probabilité p est **équiprobable** (ou **équipartie**).

Exemple : On lance un dé à 6 faces bien équilibré. Chaque face ayant les mêmes chances d'apparaître, chaque éventualité a une probabilité de $\frac{1}{6}$. La loi de probabilité est donc :

e_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Remarque : De manière générale, si une expérience aléatoire est **équiprobable** et comporte n issues différentes, chacune des issues a une **probabilité de $\frac{1}{n}$** .

1.2 Modélisation d'expérience aléatoire

Définition 1 : **Modéliser** une expérience aléatoire, c'est choisir une loi de probabilité qui représente au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Remarque : Lien avec les fréquences

Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un évènement devient proche de sa probabilité.

Activité Algorithmique : voir fiche distribuée « Probabilités SIMULATION TI 83 »

2 Probabilité d'un événement

2.1 Vocabulaire des événements

Définition 2:

Un **événement** A est une **partie** de l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$).
 \emptyset est l'évènement **impossible**.
 Ω est l'évènement **certain**.

Exemple : On lance un dé à 6 faces bien équilibré.

— Des exemples d'événement :

- A : « Obtenir un nombre pair »
- B : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 »
- B' : « Obtenir un nombre strictement supérieur à 4 »
- C : « Obtenir 7 »
- D : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 »

On a :

- $A = \{2; 4; 6\}$
- $B = \{1; 2\}$
- $B' = \{5; 6\}$
- $C = \emptyset$ (événement **impossible**)
- $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega$ (événement **certain**)

Définition 3 : Soient A et B deux événements d'un univers Ω .

- L'événement $A \cap B$ est l'événement « **A et B** ».
- L'événement $A \cup B$ est l'événement « **A ou B** ».
- L'événement \bar{A} est l'événement « **contraire de A** » ou « **non A** ».
- Deux événements A et B sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple : On reprend les notations de l'exemple précédent.

- $A \cap B$ est l'événement « Obtenir un nombre pair inférieur ou égal à 2 ».
 $A \cap B = \{2\}$
- $A \cup B$ est l'événement « Obtenir un nombre pair ou un nombre inférieur ou égal à 2 ».
 $A \cup B = \{1; 2; 4; 6\}$
- \bar{A} est l'événement « Obtenir un nombre impair ».
 $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$
- Les événements B et B' sont incompatibles.

Exercices : 56, 58 page 184⁴ [TransMath 2014]

2.2 Probabilité d'un événement

Propriété :

La **probabilité d'un événement** A est la **somme des probabilités des issues** qui le composent. On la note $p(A)$.
On a donc $0 \leq p(A) \leq 1$.

Remarques :

1. $p(\Omega) = 1$. L'ensemble Ω est un **événement certain**.
2. $p(\emptyset) = 0$. L'ensemble vide est un **événement impossible**.
3. Dans le cas de l'équiprobabilité, si l'univers Ω comporte n issues, on a :

$$p_i = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Propriété 1 :

Si A est un événement :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Exemple : On reprend les notations de l'exemple du 2.1

$$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad p(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. Vocabulaire des probabilités.

Exercices : 1 page 171 ; 4, 5 et 8 page 173⁵ – 70, 73 page 187⁶
7, 9 page 173⁷ – 11, 15 page 175⁸ – 68 page 186⁹ [TransMath]

Propriété 2 :

1. Si A et B sont deux événements :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

2. Si les événements A et B sont incompatibles :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Exemple : On reprend les notations de l'exemple du 2.1

— $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$

— $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (on retrouve ce résultat directement en détaillant l'événement $A \cup B$.)

Exercices : 17, 19, 20 page 177 et 80 page 189¹⁰ – 74, 78 page 187¹¹ [TransMath]

Références

[TransMath] Transmath Seconde, Nathan (édition 2014).

-
5. Calculer la probabilité d'un événement.
 6. Utiliser des fréquences.
 7. Cas de l'équiprobabilité.
 8. Modélisation à l'aide d'un arbre.
 9. Cas d'un tirage simultané.
 10. Utilisation des formules.
 11. Probabilité de l'intersection, de l'union.